

0-784377

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи



Трубицына Наталья Геннадьевна

**ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА И
ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ**

Специальность 01.03.01 – астрометрия и небесная механика

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Санкт-Петербург – 2010

**Работа выполнена в ГОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»
г. Ижевск**

**Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Кондратьев Борис Петрович**

**Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
Чуйкова Надежда Алексеевна,
Московский государственный университет
кандидат физико-математических наук
Осипков Леонид Петрович,
Санкт-Петербургский государственный университет**

**Ведущая организация:
Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН**

**Защита состоится «19» октября 2010 г. в 17-00 на заседании совета Д 212.232.15
по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском
государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый
Петергоф, Университетский пр., 28, ауд. 2143 (Математико-механический
факультет).**

**С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СПбГУ
Автореферат разослан « / » 09 2010 г.
Ученый секретарь
диссертационного совета**

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КГУ



0000728501

Орлов В.В.

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы

Нахождение силовых полей для тел разной формы и концентрации вещества или заряда, когда отдельные частицы в них взаимодействуют по закону обратных квадратов, является важной и актуальной задачей в теоретической астрономии и физике. Стремительное развитие современной небесной механики ставит перед специалистами в области теоретической астрономии актуальные задачи по созданию новых методов в теории потенциала, которые позволили бы, в частности, расширить список тел с известным потенциалом. Большой теоретический и практический интерес представляет, например, нахождение пространственного потенциала слоисто-неоднородного эллипсоида и потенциала кругового тора. Новым и перспективным для решения большого класса задач является общий метод эквигравитирующих элементов и метод представления потенциала рядом Лапласа. Однако даже сама постановка проблемы эквигравитирующих элементов требует развития специальных математических методов.

В последние годы заметно усилился интерес к развитию классической теории фигур равновесия и построению моделей газопылевых облаков, звезд и галактик, находящихся во внешних силовых полях. В частности, это связано с необходимостью построения фигур равновесия многочисленного класса глобул. Актуальным также является изучение фигур равновесия небесных тел, расположенных внутри кольцевых структур. Построение динамических моделей таких конфигураций представляет не только самостоятельный интерес в виду многочисленных практических приложений в астрономии, но и заметным образом стимулирует фундаментальные исследования в области ньютоновского потенциал и теории фигур равновесия.

Цель работы

Диссертация посвящена решению шести задач, важных для развития теории потенциала и теории фигур равновесия.

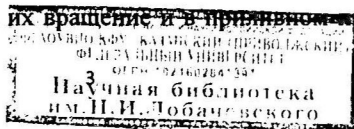
1. В первой главе диссертации, следуя работам [1; 2; 3], излагается прямой метод нахождения логарифмических потенциалов однородных двумерных тел и этим методом находится внутренний потенциал однородного гравитирующего цилиндра с лемнискатным сечением. Основное внимание в этой задаче уделяется получению потенциала данного цилиндра в конечной аналитической форме и нахождению семейства эквипотенциалей.

2. Во второй главе диссертации, опираясь на работы [2; 4; 5], находится внешний пространственный гравитационный потенциал однородного кругового тора через известную из [3] систему пяти эквиравитирующих элементов. Для решения этой сложной задачи применяются методы теории функций комплексного переменного.

3. В третьей главе диссертации внешний потенциал однородного кругового тора представлен рядом Лапласа [6] по отрицательным степеням радиус-вектора пробной точки. Главной целью является нахождение коэффициентов и радиуса сходимости этого ряда.

4. В четвертой главе диссертации решена задача о разложении в ряд Лапласа «внутреннего» потенциала однородного кругового тора [7] по положительным степеням радиус-вектора пробной точки. Как и в третьей главе, акцент делается на нахождении точных аналитических формул для коэффициентов такого ряда и определении его радиуса сходимости.

5. В пятой главе в эллипсоидальном приближении изучаются фигуры равновесия газопылевых туманностей в Галактике и в других гравитационных полях [8]. Целью является построение моделей равновесных глобул. Учитывается собственная гравитация глобул, их вращение и в приливном приближении гра-



витационное поле внешней звездной системы. Математические модели построены как для фигур относительного равновесия, так и для фигур с внутренними течениями.

6. В шестой главе поставлена и решена задача о влиянии колец на фигуру равновесия вращающегося центрального тела, когда внутренний потенциал кольца в приливном приближении можно представить квадратичной функцией от координат пробной точки [9]. Стимулом к этой работе является существование реальных астрофизических объектов с кольцами.

Научная новизна работы

1. Впервые в конечном аналитическом виде через элементарные функции найден внутренний гравитационный потенциал однородного цилиндра с лемнискатным сечением. Это позволило изучить эквипотенциали поля и доказать, что они образуют два семейства кривых, разделенных сепаратрисой с нулевым потенциалом на ней. Внутри сепаратрисы потенциал всюду имеет положительное значение и достигает максимума в точке на оси симметрии фигуры. Вне сепаратрисы эквипотенциали оказываются разомкнутыми и потенциал на них всюду отрицательный. Решение данной задачи раскрывает широкие возможности прямого метода нахождения логарифмических потенциалов двумерных тел.

2. Через эквигравитирующие элементы впервые найден пространственный внешний гравитационный потенциал кругового тора. Проведена всесторонняя теоретическая и численная проверка результатов. По найденной формуле рассчитано семейство эквипотенциалей тора. Тем самым доказана практическая значимость метода нахождения потенциала тора через эквигравитирующие элементы.

3 - 4. Внешний и «внутренний» потенциал однородного кругового тора представлен рядом Лапласа. Впервые в точном аналитическом виде получены коэффициенты этих рядов. Для внешнего потенциала тора коэффициенты ряда

выражаются через полиномы Лежандра, а для «внутреннего» потенциала – через гипергеометрическую функцию Гаусса. В обоих случаях коэффициенты зависят только от геометрического параметра тора. Доказана сходимость данных рядов и в обоих случаях найдены их радиусы сходимости. Обнаружен зазор (сферическая оболочка), где задача о представлении потенциала тора в виде степенного ряда должна решаться в особом порядке.

5. Выведена и решена система уравнений гидродинамики, описывающая фигуры равновесия газопылевых туманностей в гравитационном поле Галактики и в других гравитационных полях. Фигуры равновесия глобул могут включать в себя внутренние течения с однородным вихрем. Найдено обобщенное выражение для классического приливного предела. Эти результаты расширяют теорию классических жидких эллипсоидов Римана и фигур Роша.

6. В приливном приближении рассмотрена фигура равновесия сфероида Маклорена, находящаяся внутри гравитирующего кольца или тора. В этой задаче получена общая формула для поправки к угловой скорости сфероида от возмущений внешнего кольца или тора. Тем самым дано обобщение теории классического сфероида Маклорена.

Практическая значимость работы

1. В задаче о потенциале цилиндра раскрыты широкие возможности аналитического прямого метода нахождения логарифмических потенциалов двумерных тел. Получен потенциал однородного цилиндра с лемнискатным сечением и расширен список тел, для которых потенциал известен в конечном аналитическом виде. Найдены сложные определенные интегралы, отсутствующие в справочниках. Изучено силовое поле внутри гравитирующего цилиндра и построены его эквипотенциали, образующие два семейства кривых, разделенных сепаратрисой. Внутри сепаратрисы потенциал имеет положительное значение и достигает максимума на оси симметрии фигуры. Вне сепаратрисы эквипотен-

циали разомкнуты и потенциал на них всюду отрицательный. Изучение потенциала цилиндра открывает возможность исследовать устойчивость этого тела относительно разбиения на сгустки.

2. Знание пространственного потенциала тора имеет большое практическое значение в астрономии и позволяет изучать влияние гравитирующих кольцевых и тороидальных структур на форму планет, звезд и галактик. Проверка показала корректность найденного внешнего потенциала тора, что подтверждает эффективность метода эквигравитирующих элементов. Знание гравитационного потенциала тора позволяет также ставить задачи по изучению орбит звезд на поверхности и внутри тора.

3-4. Представление внешнего и «внутреннего» потенциалов тора в виде ряда Лапласа дает весьма эффективный на практике метод вычисления потенциала в любой заданной точке вне вещества этой фигуры. Данные ряды быстро сходятся и дают результат с требуемой для каждой конкретной задачи точностью. Полученное выражение ряда Лапласа для «внутреннего» потенциала тора используется, в частности, при нахождении приливного влияния внешнего тора на внутреннюю фигуру равновесия.

5. Полученная нами полная система уравнений для фигур относительного равновесия и фигур с внутренним полем скоростей позволяет описывать форму и пространственное расположение глобул и плотных газопылевых туманностей в Галактике.

6. Разработана модель приливного влияния колец на внутреннюю фигуру равновесия, вращающегося астрофизического объекта. Рассмотрены три модели колец, имеющих важное практическое значение. Выявлены случаи, когда влияние колец на форму звезды или галактики является существенным и сравнимым с эффектом вращения тела. Ярким примером является звезда WOH G64 в БМО (красный сверхгигант), для которой относительная поправка квадрата угловой скорости которой равна 18%. Заметное влияние оказывает гравитирующее пылевое кольцо и на галактику SO⁺ M 104 (NGC 4594) «Сомbrero».

Апробация работы

Основные результаты диссертации регулярно докладывались на научных семинарах кафедры Астрономии и механики УдГУ, на семинарах ГАИШ (МГУ) и кафедры небесной механики СПбГУ, а также на следующих конференциях:

1. Международная конференция “Новые результаты аналитической и качественной небесной механики”, Москва, 2000.
2. Всероссийская астрономическая конференция, С.-Петербургский государственный университет, 2001.
3. 5-ая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция ЕГНОК, УдГУ, Ижевск, 2001 г.
4. 6-ая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция ЕГНОК, УдГУ, Ижевск, 2002 г.
5. Международная конференция: Порядок и хаос в звездных и планетных системах, С.-Петербургский государственный университет, 2003.
6. Восьмой съезд Астрономического общества и Международный симпозиум АСТРОНОМИЯ-2005, Москва, ГАИШ, 2005.
7. XLVI Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии, Москва, РУДН, 2010.

Результаты, выносимые на защиту

1. Прямой метод нахождения логарифмических потенциалов двумерных тел, с помощью которого в конечном виде через элементарные функции получен внутренний потенциал однородного гравитирующего цилиндра с лемнискатным сечением.
2. Новым методом, через систему эквиравитирующих элементов получено выражение гравитационного потенциала однородного кругового тора в произвольной внешней точке пространства. Рассчитано семейство экvipотенциалей.
3. «Внутренний» и внешний потенциал однородного кругового тора представлен рядами Лапласа. Впервые в точном аналитическом виде получены

коэффициенты этих рядов. Доказана сходимость рядов Лапласа и в обоих случаях найдены их радиусы сходимости.

4. Выведена и решена полная система уравнений гидродинамики, описывающая фигуры равновесия газопылевых туманностей в гравитационном поле Галактики. Построены модели для фигур относительного равновесия глобул и фигур с внутренними течениями. Найдено обобщенное выражение для классического приливного предела.
5. Построена модель, где в приливном приближении учитывается влияние внешних материальных колец или тора на центральную фигуру равновесия. Дана формула для поправки к угловой скорости сфероида Маклорена, расположенного внутри кольцевых структур.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Содержит 21 рисунок. Объем работы составляет 117 страниц. Список литературы включает 58 наименований.

Краткое содержание диссертационной работы

В первой главе диссертации, следуя работам [1; 2; 3], излагается прямой метод в теории потенциала, и находится внутренний потенциал однородного гравитирующего цилиндра с лемнискатным сечением.

Дан гравитирующий однородный двумерный цилиндр с лемнискатным сечением. После преобразований основной формулы логарифмического потенциала цилиндра

$$\varphi(x_1, x_2) = 2G \iint_S \rho(x') \ln \frac{2H}{D} dx'_1 dx'_2, \quad D = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}, \quad (1)$$

задача сводится к вычислению сложных определенных интегралов вида

$$R_2 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \cdot \ln \frac{z - ae^{i\theta} \sqrt{\cos 2\theta}}{z + ae^{i\theta} \sqrt{\cos 2\theta}} d\theta, \quad (2)$$

отсутствующих в справочниках. У нас предложен метод взятия таких интегра-

лов, основанный на разделении корней полинома в знаменателе подынтегрального выражения на вещественные и комплексные.

В итоге, внутренний потенциал цилиндра с лемнискатным сечением был найден через элементарные функции:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \equiv \frac{\varphi}{2G\rho a^2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2eH}}{a}\right) = & -\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+p^2}{4} + (b_1-b_2)\Phi_1 + \\ & + (a_2-a_1)\Phi_2 - \frac{1}{4}(b^2+p^2)\left[\frac{\pi}{2} + (a_2-\alpha)\Phi'_2 + (\beta-b_2)\Phi'_1\right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $b = \frac{\sqrt{2}}{a}x_1$ и $p = \frac{\sqrt{2}}{a}x_2$ – нормированные координаты испытываемой точки,

а вспомогательные функции Φ_1 , Φ_2 , Φ'_1 , Φ'_2 имеют вид

$$\Phi_1 = \frac{u+v}{4q^3\sin\alpha}, \quad \Phi_2 = \frac{\bar{v}-\bar{u}}{4q\sin\alpha}; \quad (4)$$

$$\Phi'_1 = \frac{\pi}{\left|\sin\frac{\bar{\alpha}}{2}\right|} \frac{2q\cos\frac{\alpha}{2}(1+\bar{q}^2)+\bar{q}^2-1}{8\bar{C}_1q^3\bar{q}^3\cos\frac{\alpha}{2}}, \quad \Phi'_2 = \frac{\pi}{\left|\sin\frac{\bar{\alpha}}{2}\right|} \frac{1-\bar{q}^2}{8\bar{C}_1q\bar{q}^3\cos\frac{\alpha}{2}}. \quad (5)$$

В формулах (4)

$$\begin{aligned} u = \sin\frac{\alpha}{2} \ln \frac{q^2 + 2q\cos\frac{\alpha}{2} + 1}{q^2 - 2q\cos\frac{\alpha}{2} + 1}, \\ v = 2\cos\frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{arccrg} \frac{1 - q\cos\frac{\alpha}{2}}{q\sin\frac{\alpha}{2}} + \operatorname{arccrg} \frac{1 + q\cos\frac{\alpha}{2}}{q\sin\frac{\alpha}{2}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь, в свою очередь,

$$q^4 = b_2, \quad \cos\alpha = \frac{a_2}{2\sqrt{b_2}} = \frac{a_2}{2q^2} < 1, \quad (7)$$

$$a_2 = \frac{Q(4Q+W)+2E}{2(Q^2+E)}, \quad b_2 = \frac{(4Q+W)^2}{16(Q^2+E)}, \quad (8)$$

причем в (8) использованы обозначения

$$Q = 1 + p^2 - b^2, \quad W = (b^2 + p^2)^2, \quad E = 4^2 b^2 p^2. \quad (9)$$

В выражении (5) введены функции

$$\bar{q}^4 = \frac{1 - 2q \cos \frac{\alpha}{2} + q^2}{1 + 2q \cos \frac{\alpha}{2} + q^2}, \quad (10)$$

$$\cos \bar{\alpha} = \frac{1 - q^2}{\sqrt{q^4 - 2q^2 \cos \alpha + 1}}, \quad (11)$$

$$\bar{C}_1 = 1 + 2q \cos \frac{\alpha}{2} + q^2. \quad (12)$$

В частном случае на границе цилиндра потенциал (3) выражается в замечательно кратком виде

$$\tilde{\varphi} = -\frac{\pi}{4} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \ln \frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \ln \frac{1 + \sin 2\theta}{1 - \sin 2\theta}. \quad (13)$$

В другом частном случае, когда точка находится на оси симметрии цилиндра, потенциал принимает вид

$$\tilde{\varphi} = \ln \frac{2}{b} + K - \frac{\pi b^2}{4}. \quad (14)$$

Здесь $b \neq 1$ и

$$K = \begin{cases} -\frac{\sqrt{1-b^2}}{4} \ln \frac{T+1}{T-1} & \text{для } b < 1, \\ \frac{\sqrt{b^2-1}}{2} \operatorname{arctg} \tilde{T} & \text{для } b > 1, \end{cases} \quad (15)$$

с обозначением

$$T = \frac{2-b^2}{2\sqrt{1-b^2}} > 1. \quad (16)$$

Численно исследованы кривые равного потенциала (3). Показано, что они образуют два семейства кривых, разделенных сепаратрисой с нулевым потенциалом на ней. На семействе замкнутых кривых, расположенных внутри сепаратрисы, потенциал имеет положительное значение и достигает максимума на

оси симметрии фигуры в точке $b \approx 0.47077$. Вне сепаратрисы эквипотенциали оказываются разомкнутыми и потенциал на них отрицательный.

Во второй главе диссертации, опирающейся на работы [3; 5], решается задача о нахождении внешнего гравитационного потенциала однородного кругового тора с поверхностью

$$(r - R_0)^2 + x_3^2 = r_0^2 \quad (17)$$

через известную из [3] систему эквигравитирующих элементов: составного одномерного стержня из трех звеньев с чисто мнимой плотностью на каждом из них

$$\begin{aligned} \mu_1(\zeta) &= -\frac{8}{3} i \rho r_0 R_0 \left[\left(\frac{1}{k} + k \right) E(k) - \left(\frac{1}{k} - k \right) K(k) \right], \\ k &= \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + \zeta^2}} \leq 1, \quad -\sqrt{R_0^2 - r_0^2} \leq \frac{\zeta}{i} \leq \sqrt{R_0^2 - r_0^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mu_2(\zeta) &= \mu_3(\zeta) = -\frac{8}{3} i \rho r_0 R_0 \left[\left(1 + k^2 \right) E\left(\frac{1}{k}\right) + \left(1 - k^2 \right) K\left(\frac{1}{k}\right) \right], \\ k &= \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + \zeta^2}} \geq 1, \quad -R_0 \leq \frac{\zeta}{i} \leq -\sqrt{R_0^2 - r_0^2}, \quad \sqrt{R_0^2 - r_0^2} \leq \frac{\zeta}{i} \leq R_0, \end{aligned} \quad (19)$$

и двух вещественных точечных масс, расположенных на краях стержня

$$M_4 = M_5 = \frac{4}{3} \pi \rho r_0^3. \quad (20)$$

С помощью указанных эквигравитирующих элементов было получено выражение гравитационного потенциала тора в произвольной внешней точке пространства через определенные интегралы от полных эллиптических интегралов Лежандра I-го и II-го рода:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{тор}}(r, x_3) &= \frac{8\sqrt{2}}{3} G \rho q R_0^3 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-q^2}} \frac{\sqrt{S+X}}{S} \left[\left(\frac{1}{k} + k \right) E(k) - \left(\frac{1}{k} - k \right) K(k) \right] dx + \right. \\ &+ \left. \int_{\sqrt{1-q^2}}^1 \frac{\sqrt{S+X}}{S} \left[\left(1 + k^2 \right) E\left(\frac{1}{k}\right) + \left(1 - k^2 \right) K\left(\frac{1}{k}\right) \right] dx + \frac{\pi}{2} q^2 \left[\frac{\sqrt{S+X}}{S} \right]_{x=1} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь, кроме известных уже величин, введены также обозначения:

$$q = \frac{r_0}{R_0}, \quad k(x) = \frac{q}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (22)$$

$$X(x) = r^2 + x_3^2 - R_0^2 x^2, \quad Y(x) = 2R_0 x_3 x, \quad S(x) = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Обратим внимание, что наряду с упомянутыми интегралами, в выражение (21) входит и конечный член. В целом, выражение (21) по форме заметно отличается от ранее известного потенциала тора [3].

Главная формула для потенциала тора (21) была проверена аналитически в том частном случае, когда пробная точка находится на оси симметрии. По общей формуле было рассчитано семейство эквипотенциалей тора. Кроме того, выполнено численное сравнение результатов, найденных данным методом с результатами для тора, полученными другим способом [3] – через тонкие широкие круговые кольца. Это сравнение позволило убедиться в достоверности обоих известных теперь представлений внешнего потенциала тора.

В третьей главе диссертации решена задача представления потенциала однородного кругового тора с поверхностью (17) в виде ряда Лапласа

$$\varphi_{\text{тор}}(\theta, R) = G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}}{R^{2n+1}} P_{2n}(\cos \theta), \quad R = \sqrt{r^2 + x_3^2}, \quad \cos \theta = \frac{x_3}{R}. \quad (23)$$

Коэффициенты ряда (23) C_{2n} можно записать в интегральном виде

$$C_{2n} = \rho \iiint (x_3 + ix_1)^{2n} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (24)$$

(интегрирование по объему тора). Здесь ρ – однородная плотность тора, G – гравитационная постоянная.

Наш подход заключается в том, что вначале мы рассматриваем потенциал тора на оси его симметрии Ox_3 . Разложение внешнего потенциала тора (внешним для тора здесь считаем потенциал в тех точках, которые находятся вне вещества и вне сферы радиусом R_0) на этой оси в ряд по обратным степеням x_3 имеет вид

$$\varphi(x_3) = G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}}{x_3^{2n+1}}, \quad (r=0, x_3 > 0). \quad (25)$$

Прямое интегрирование по x_3 выражения (24) дает

$$C_{2n} = \frac{\rho}{2n+1} \iint \left[(x_3 + ix_1)^{2n+1} - (ix_1 - x_3)^{2n+1} \right] dx_1 dx_2, \quad (26)$$

где оставшийся двойной интеграл берется по экваториальному сечению тора, а x_3 относится только к верхней половине его поверхности.

Далее декартовы координаты поверхности тора представим в параметрической форме через вспомогательные углы θ и λ :

$$\begin{aligned} x_1 &= (R_0 + r_0 \cos \theta) \cos \lambda, \\ x_2 &= (R_0 + r_0 \cos \theta) \sin \lambda, \\ x_3 &= r_0 \sin \theta. \end{aligned} \quad (27)$$

Угол θ отсчитывается от экваториальной плоскости, а азимутальный угол λ - от оси Ox_1 .

После многих преобразований выражение (26) можно привести к виду

$$C_{2n} = \rho r_0 (2n)! (iR_0)^{2n+1} \sum_{m=0}^{2n+1} (i)^{-m} \frac{q^m}{m!(2n+1-m)!} \int_0^{2\pi} (\cos \lambda)^{2n+1-m} (R_0 I_1 + r_0 I_2) d\lambda, \quad (28)$$

где обозначены вспомогательные интегралы

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin \theta (\sin \theta + i \cos \theta \cos \lambda)^m d\lambda, \quad (29)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + i \cos \theta \cos \lambda)^m d\lambda. \quad (30)$$

Введём для симметрии в I_1 коэффициенты α, β

$$\alpha = 1, \quad \beta = i \cos \lambda \quad (31)$$

и запишем (29) в таком виде

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin \theta (\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta)^m d\theta. \quad (32)$$

Нормированные коэффициенты α и β можно представить в форме

$$\cos \theta_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin \theta_0 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (33)$$

Тогда вместо (32) получим

$$I_1 = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{m}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^m (\theta + \theta_0) \sin \theta d\theta. \quad (34)$$

В итоге, для нечетных m (при четном m интеграл (34) равен нулю), имеем

$$I_1 = 2\pi \frac{m!!}{(m+1)!!} \sin^{m-1} \lambda. \quad (35)$$

Интеграл I_2 из (30), в отличие от I_1 , не равен нулю только при четных m , и мы находим его в виде

$$I_2 = 2\pi i \frac{m(m-1)!!}{(m+2)!!} \cos \lambda \sin^{m-2} \lambda. \quad (36)$$

Подставляя I_1 из (35) и I_2 из (36) под знак интеграла по переменной λ в (28), после преобразований, находим точные аналитические формулы для коэффициентов ряда Лапласа

$$C_{2n} = (-1)^n \frac{\pi^2 \rho R_0^{2n+3} (1-q^2)^{\frac{n}{2}} (2n-1)!!}{3 \cdot 2^{n-2} (n+1)!} \left\{ \left[n + \left(\frac{3}{2} + 3n + 2n^2 \right) q^2 \right] P_n(\mu) - n\sqrt{1-q^2} [1 + 2(n+1)q^2] P_{n-1}(\mu) \right\}, \quad \mu = \frac{2-q^2}{2\sqrt{1-q^2}}. \quad (37)$$

Они выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\mu)$, зависящие от геометрического параметра тора $q = \frac{r_0}{R_0} \leq 1$.

Данный результат интересен, прежде всего, тем, что, как известно, и сам ряд Лапласа представляет собой разложение потенциала тела по полиномам Лежандра, причем эти полиномы зависят только от координат пробной точки.

Разложение (23) для тора имеет место только вне сферы радиуса R_0 . Проверка показала, что указанный ряд быстро сходится и даёт правильные результаты.

Для «внутреннего» потенциала тора («внутренним» считаем потенциал в тех пробных точках, которые находятся вне вещества, но внутри сферы радиусом $\sqrt{R_0^2 - r_0^2}$ с поверхностью (17) ряд Лапласа имеет вид

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_{\nu} r^{\nu} P_{\nu}(\cos \theta), \quad (38)$$

а коэффициенты ряда D_{ν} выражаются интегралами

$$D_{\nu} = 2\pi G \rho \oint_S r^{1-\nu} P_{\nu}(\cos \theta) \sin \theta dr d\theta. \quad (39)$$

Здесь θ – полярный угол. Задача, рассматриваемая в четвертой главе диссертации, заключается в нахождении коэффициентов D_{ν} . Для этого используем известное из [2] или [3, стр. 194] выражение потенциала однородного кругового тора на оси симметрии

$$\varphi(x_3) = \frac{8}{3} \pi G \rho r_0 R_0 \cdot J = \frac{4}{3} \frac{M_{\text{tor}} G}{\pi r_0} \cdot J, \quad (40)$$

где функция $J(x_3)$

$$J(x_3) = \left(\frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{k} \right) E(\tilde{k}) - \left(\frac{1}{\tilde{k}} - \tilde{k} \right) K(\tilde{k}), \quad \tilde{k} = \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + x_3^2}}. \quad (41)$$

Идея примененного метода заключается в разложении потенциала тора (40) только на оси симметрии Ox_3 по степеням x_3^ν . А именно, раскладывается функция J из (41) с последующим выделением в этом разложении коэффициентов при x_3^ν . Это и будут, с точностью до постоянного множителя, искомые коэффициенты D_ν . С этой целью интеграл J из (41) преобразуется вначале к виду $J = J_1 + J_2$, где

$$J_1 = r_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{R_0^2 + x_3^2 - r_0^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi; \quad (42)$$

$$J_2 = \frac{r_0}{R_0^2 + x_3^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{R_0^2 + x_3^2 - r_0^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (43)$$

После многих преобразований и вычислений находим

$$J_1 = k \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \left(\frac{x_3^2}{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 \varphi} \right)^m \right] d\varphi, \quad (44)$$

$$J_2 = \frac{r_0}{R_0^3} (R_0^2 + x_3^2 - r_0^2) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^m \frac{(2m+1)!!}{(2m)!!} \left(\frac{x_3^2}{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 \varphi} \right)^m \right] d\varphi. \quad (45)$$

В итоге получим

$$\begin{aligned}
D_{2m} = \frac{4}{3} \frac{M_{\text{tor}} G}{\pi} \int_0^{\pi/2} & \left[(-1)^m \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 \varphi}} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} (R_0^2 - r_0^2 \sin^2 \varphi)^{-m} + \right. \\
& + (R_0^2 - r_0^2) (-1)^m \frac{(2m+1)!!}{(2m)!!} (R_0^2 - r_0^2 \sin^2 \varphi)^{-m \frac{3}{2}} + \\
& \left. + (-1)^{m-1} \frac{(2m-1)!!}{(2m-2)!!} (R_0^2 - r_0^2 \sin^2 \varphi)^{-m \frac{1}{2}} \right] d\varphi.
\end{aligned} \quad (46)$$

После интегриации по углу φ и преобразований эти коэффициенты можно записать в более кратком виде

$$D_{2m} = \frac{M_{\text{tor}} G}{R_0} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{2^m m! R_0^{2m}} {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; 2; \frac{r_0^2}{R_0^2} \right). \quad (47)$$

С учетом найденного выше, «внутренний» потенциал однородного кругового тора может быть представлен рядом Лапласа в виде

$$\varphi(r, \theta) = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} r^{2m} P_{2m}(\cos \theta), \quad (48)$$

где в качестве первого, нулевого члена выделен потенциал в центре тора

$$D_0 = \frac{4}{3} \frac{M_{\text{tor}} G}{\pi r_0} \cdot \left[\left(\frac{1}{k} + k \right) E(k) - \left(\frac{1}{k} - k \right) K(k) \right], \quad k = \frac{r_0}{R_0}, \quad (49)$$

а остальные коэффициенты выражаются через стандартную гипергеометрическую функцию.

Доказано, что для ряда Лапласа (48) радиус сходимости равен

$$R_{\text{сх}} = \sqrt{R_0^2 - r_0^2}. \quad (50)$$

Существенно, что найденный $R_{\text{сх}}$ сильно зависит от геометрического параметра тора $\frac{r_0}{R_0} \leq 1$. Лишь в частном случае $r_0 \rightarrow 0$ (при вырождении тора в тонкий обруч) эта зависимость исчезает, и тогда $R_{\text{сх}} = R_0$.

В пятой главе в эллипсоидальном приближении построены фигуры равновесия однородных глобул. Для решения задачи используется метод, разработанный в [2; 10]. Некоторые теоретические вопросы изучения динамики конфигураций с помощью вириального метода затрагиваются также в статье [11]. Мы применяем гидродинамический подход и исходим из уравнений гидродинамики во вращающейся системе отсчета.

Рассмотрим компактную глобулу, которая находится в главной плоскости Галактики на расстоянии R_0 от ее центра и обращается вокруг него по круговой орбите с угловой скоростью $\Omega(R_0)$. Гравитационный потенциал Галактики обозначим через $\Phi(R, x_3)$. С центром глобулы связана система декартовых координат $O'x_1x_2x_3$. Ось $O'x_1$ направлена от центра Галактики, $O'x_2$ лежит в главной плоскости и направлена по ходу движения.

Ограничиваясь квадратичным (приливным) приближением, потенциал Φ запишем в виде

$$\Phi(R, x_3) = \Phi_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0 (R - R_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_0 (R - R_0)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right)_0 x_3^2. \quad (51)$$

Компактность глобулы позволяет также представить R в виде

$$R = \sqrt{(R_0 + x_1)^2 + x_2^2} \approx R_0 + x_1 + \frac{x_2^2}{2R_0}. \quad (52)$$

Из баланса гравитационной и центробежной сил следует

$$\Omega^2 R_0 = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R_0^2} = - \frac{d}{dR_0} (\Omega^2 R_0). \quad (53)$$

Тогда, с учетом (52) и (53),

$$\Phi(R_0) = \Phi_0 - \Omega^2 R_0 \left(x_1 + \frac{x_2^2}{2R_0} \right) - \frac{1}{2} \left(\Omega^2 + R_0 \frac{d\Omega^2}{dR_0} \right) x_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right)_0 x_3^2. \quad (54)$$

Равновесное газопылевое облако моделируется однородным трехосным эллипсоидом с полуосями (a_1, a_2, a_3) и внутренним потенциалом

$$\varphi = \pi G \rho (I - A_1 x_1^2 - A_2 x_2^2 - A_3 x_3^2). \quad (55)$$

Полный приведенный потенциал туманности после преобразований приводится к виду

$$W = \Phi_0 - \frac{1}{2} \left(R_0 \frac{d\Omega^2}{dR_0} + 2\pi G \rho A_1 \right) x_1^2 - \pi G \rho A_2 x_2^2 + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right)_0 - \pi G \rho A_3 \right) x_3^2. \quad (56)$$

Согласно теории фигур равновесия [2; 10], поверхность глобулы должна совпадать с уровенной поверхностью $W = const$. С учетом принятой эллипсоидальности глобулы это требование дает

$$W = -\lambda \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \right) = const, \quad (57)$$

где λ – постоянный множитель, а W из (56). Приравнявая нулю коэффициенты при x_1^2 , x_2^2 и x_3^2 в (57), в итоге получим систему двух уравнений

$$a_1^2 \left(A_1 + \frac{R_0}{2} \frac{d}{dR_0} \left(\frac{\Omega^2}{\pi G \rho} \right) \right) = A_2 a_2^2 = a_3^2 \left(A_3 - \frac{1}{2\pi G \rho} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right)_0 \right). \quad (58)$$

Для реальной средней плотности глобулы $\rho \approx 4 \cdot 10^{-21} \frac{g}{cm^3}$, и с учетом оценки Оорта [12] для $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right)_0 \approx -9.21 \cdot 10^{-30} c^{-2}$, член $\frac{1}{2\pi G \rho} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right)_0 \approx 5.5 \cdot 10^{-3}$ оказывается значительно меньше значения $A_3 (\geq \frac{2}{3})$. Следовательно, последний член в правой части (58) можно отбросить, и тогда имеем

$$a_1^2 \left(A_1 + \frac{R_0}{2} \frac{d}{dR_0} \left(\frac{\Omega^2}{\pi G \rho} \right) \right) = a_2^2 A_2 = a_3^2 A_3. \quad (59)$$

Анализируя уравнения относительного равновесия (59), приходим к выводу, что глобулы без внутренних течений образуют две однопараметрические последовательности и имеют форму вытянутых сфероидов с осью симметрии, указывающей на центр Галактики. Этот вывод согласуется с результатами наблюдений [12]. Эксцентриситет e вытянутых сфероидов зависит от их удаленности R от силового центра, однако зависимость $e(R)$ является сильной только на интервале $0.1 \leq R(\text{кпк}) \leq 3$, а в районе Солнца глобулы этого класса имеют или почти сферическую, или очень вытянутую форму. Ближе критического приливного радиуса, примерно равного $0.1-0.8 \text{ кпк}$, глобулы в Галактике существовать не могут.

В параграфе 3 пятой главы рассматриваются эллипсоидальные фигуры равновесия глобул с внутренними течениями. Уравнения гидродинамики во вращающейся системе отсчёта имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \Omega^2 (x_1 + R_0) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\Phi + \varphi) + 2\Omega u_2, \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \Omega^2 x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} (\Phi + \varphi) - 2\Omega u_1, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} (\Phi + \varphi), \end{aligned} \quad (60)$$

где p – давление внутри глобулы. Внутреннее поле скоростей в глобуле линейное по координатам

$$u_1 = \frac{a_1}{a_2} \lambda x_2, \quad u_2 = -\frac{a_2}{a_1} \lambda x_1, \quad u_3 = 0, \quad (61)$$

а давление имеет вид

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right). \quad (62)$$

Используя соотношение (53) и исключая давление, получаем уравнения

$$\begin{aligned}\frac{2p_0}{\rho} &= a_1^2 \left(2 \frac{a_2}{a_1} \lambda \Omega - \lambda^2 + 2A_1 + R \frac{d\Omega^2}{dR} \right) = a_2^2 \left(2 \frac{a_1}{a_2} \lambda \Omega - \lambda^2 + 2A_2 \right) \\ &= a_3^2 \left(2A_3 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right)_0 \right),\end{aligned}\tag{63}$$

содержащих полную информацию об искомым фигурах глобул.

Система уравнений (63) была решена на различных расстояниях R от центра Галактики, результаты расчетов приведены в параграфе 4. На любом из выбранных расстояний глобула с внутренними течениями оказывается, как правило, трехосным эллипсоидом, вытянутым в направлении на центр Галактики. Сжатые сфероиды типа ЕЗ могут существовать только в качестве предельных конфигураций. На каждом из допустимых расстояний могут существовать эллипсоиды с разными отношениями полуосей, а значит, и разной геометрической формы. Учёт внутреннего поля скоростей также согласуется с наблюдениями [13]. Установлено, что для глобул должен существовать аналог приливного предела Роша, и эти объекты не могут существовать ближе нескольких сотен парсек от центра Галактики.

В шестой главе решена задача о влиянии широкого материального кольца на внутреннюю фигуру равновесия. Внутренний потенциал кольца в приливном приближении представлен квадратичной функцией от координат пробной точки.

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad (\alpha > 0).\tag{64}$$

Центральное тело вращается равномерно с угловой скоростью Ω . Его фигуру равновесия ищем в виде классического сфероида Маклорена с поверхностью

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad a_1 \geq a_3.\tag{65}$$

Тогда поправка к квадрату угловой скорости фигуры равновесия [9], возникающая за счёт гравитационного воздействия кольца, оказывается равной

$$\delta\left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}\right) = -\frac{\alpha}{\pi G\rho}\left(1 + 2\frac{a_2^2}{a_1^2}\right). \quad (66)$$

В самом простом случае кольцо может быть однородным. Тогда для плоского кольца с граничными радиусами R_1 и R_2 и поверхностной плотностью σ поправка к квадрату нормированной угловой скорости фигуры равновесия

$$\delta\left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}\right) = -\frac{2M_r}{3M_0} \frac{a_1^3(3-2e^2)\sqrt{1-e^2}}{R_1 R_2 (R_1 + R_2)}. \quad (67)$$

Для практических приложений важно рассмотреть также неоднородное кольцо с законом распределения плотности, которое обычно принимается для протопланетного кольца, из которого впоследствии образовались планеты и малые тела Солнечной системы. Этому условию можно удовлетворить, если взять распределение плотности в виде

$$\sigma(r) = C\sqrt{(R_2 - r)(r - R_1)}. \quad (68)$$

В итоге, находим поправку

$$\delta\left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}\right) \approx -8 \frac{M_r}{M_0} \frac{(\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1})^2}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{R_0^3}{(R_2 - R_1)(R_2^2 - R_1^2)}. \quad (69)$$

Прилагая формулу (66) к кольцевым галактикам, распределение плотности в широком кольце можно представить законом

$$\sigma(r) = \frac{C}{r}, \quad R_1 \leq r \leq R_2. \quad (70)$$

В общем случае внутреннюю фигуру звездной системы считаем сжатым сфероидом с эксцентриситетом e , а внутренний радиус кольца положим равным экваториальному радиусу центральной фигуры. В итоге:

$$\delta\left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}\right) \approx -\frac{1}{6} \frac{M_r}{M_0} (3-2e^2)\sqrt{1-e^2} \frac{R_1(R_1 + R_2)}{R_2^2}. \quad (71)$$

Здесь $\bar{\rho}$ – средняя плотность центральной фигуры.

Часто необходимо учитывать, что многие галактики содержат не только звезды, но также газ и пыль. Масса звезд в галактиках, как правило, значительно

превышает массу газа, поэтому приливное воздействие внешнего кольца сильнее всего будет сказываться на фигуре газовой подсистемы. Возникает новая интересная задача: как учесть приливное влияние кольца не на всю галактику (оно может быть ничтожно малым), а только на газовую составляющую. Приращение квадрата угловой скорости для одной только газовой подсистемы оказывается равным

$$\delta\left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_1}\right) \approx \frac{1}{6} \frac{M_1}{M_g} (3-2e^2) \sqrt{1-e^2} \frac{R_1}{R_2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right). \quad (72)$$

Наконец, влияние гравитирующего однородного кругового тора на сплюснутость центральной конфигурации описывается выражением

$$\delta\left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}\right) = -\frac{1}{3\pi^2 G\rho} \frac{M_{\text{tor}} G}{r_0^2 R_0} \cdot \left[(1-2k^2)E(k) - (1-k^2)K(k) \right] (3-2e^2). \quad (73)$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ - стандартные полные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода, а модуль $k = \frac{r_0}{R_0} \leq 1$, где R_0 и r_0 - радиусы осевой и вспомогательной окружности.

Применение формулы (69) для оценки влияния широкого круглого кольца к конкретным объектам показало, что влиянием кольца на сжатие Сатурна и Солнца при современной точности наблюдений можно пренебречь. Однако влияние кольца на сплюснутость центрального сгущения в галактике «Сомbrero» оказывается значительным и составляет примерно 18% от влияния вращения самого газового сфероида. Для красного сверхгиганта WOH G64, окруженного мощным массивным тором, влияние внешнего тора на фигуру центральной звезды, согласно формуле (73), оказывается на 6-7 порядков больше, чем для Сатурна и Солнца, и этим влиянием уже нельзя пренебрегать.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Кондратьев Б. П., Трубицына Н. Г., Мухаметшина Э. Ш. Прямой метод нахождения потенциалов двумерных однородных тел // Вестник Удмуртского Университета. Серия Математика, 2003. С. 71.
2. Кондратьев Б. П., Дубровский А. С., Трубицына Н. Г., Мухаметшина Э. Ш. Пространственный потенциал однородного кругового тора через эквигравитирующие элементы // Журнал технической физики, РАН, т. 78, № 7, 2008. С. 132.
3. Кондратьев Б. П., Дубровский А. С., Трубицына Н. Г., Мухаметшина Э. Ш. Разложение потенциала однородного кругового тора в ряд Лапласа // Журнал технической физики, РАН, т. 79, № 2, 2009. С. 17.
4. Кондратьев Б. П., Трубицына Н. Г. Нахождение силовой функции взаимного притяжения двух тел методом эквигравитирующих стержней // Вестник Удмуртского Университета. Серия Математика, № 3, 2001. С. 41.
5. Кондратьев Б. П., Трубицына Н. Г. Гравитационное и электростатическое поле однородного кругового конуса // Вестник Удмуртского Университета. Серия Астрономия и математическая физика, №1, 2009. С. 62.
6. Кондратьев Б. П., Трубицына Н. Г. Разложение внутреннего потенциала однородного кругового тора в ряд Лапласа // Журнал технической физики, РАН, № 1, 2010.
7. Кондратьев Б.П., Трубицына Н.Г. Фигуры равновесия компактных газопылевых туманностей в галактике // Вестник Удмуртского Университета. Серия Астрономия и математическая физика, №1, 2010. С. 52-67.
8. Кондратьев Б.П., Трубицына Н.Г. Приливное влияние колец на центральные фигуры равновесия // Вестник Удмуртского Университета. Серия Астрономия и математическая физика, №1, 2010. С. 68-81.

9. Трубицына Н.Г. Фигура равновесия внутри двух гравитирующих колец // Вестник Удмуртского Университета. Серия Астрономия и математическая физика, №1, 2010. С. 82-85.
10. Kondratyev B.P., Trubitsina N.G. Tidal effect of rings on central equilibrium figures // Astrophysics. Vol. 53, № 2, 2010. P. 189-201.

Личный вклад автора

В задаче 1 о внутреннем логарифмическом потенциале однородного цилиндра с лемнискатным сечением, основные результаты которой были опубликованы в статье 1, вклад автора состоит в преобразовании и упрощении основного интеграла задачи (1.22) (см. диссертацию), а также в преобразовании и нахождении важных вспомогательных интегралов I_1 и I_2 . Автор выполнила также численную проверку окончательного выражения потенциала и совместно с научным руководителем рассчитала эквипотенциали внутри цилиндра.

В задаче 2 о нахождении пространственного потенциала однородного кругового тора через эквиравитирующие элементы, результаты которой были опубликованы в статье 2, автору принадлежат преобразования сложных интегралов в комплексной плоскости, см. формулу (2.21) диссертации, дающих вклад в потенциал тора от трех эквиравитирующих стержней с чисто мнимым распределением плотности (формулы (18), (19)). Кроме того, автор активно участвовала в проверке эквиравитирующих элементов тора по массе, а также выполнила часть расчетов по основной формуле потенциала тора (21).

В публикации 3, составившей основу задачи 3 о коэффициентах ряда Лапласа для внешнего потенциала однородного кругового тора, автору принадлежит нахождение в конечном аналитическом виде важных интегралов I_1 и I_2 (форму-

лы (29) и (30)), а также в математической обработке и приведении коэффициентов ряда Лапласа C_n к итоговому виду (37).

В статье 6 (задача 4) о коэффициентах ряда Лапласа для «внутреннего» потенциала однородного кругового тора автору принадлежит нахождение в конечном аналитическом виде важных интегралов J_1 из (42) и J_2 из (43), а также в математической обработке аналитических выражений для коэффициентов D_{2m} .

В статье 7 (задача 5) о фигурах равновесия глобул автору принадлежит вывод и анализ полного приведенного потенциала во внутренней точке газовой туманности. Выполнен также теоретический анализ уравнений равновесия и проделаны численные расчеты формы равновесных глобул по формулам, полученным Кондратьевым Б.П.

В статьях 8 и 10, наряду с участием в постановке задачи 6, автор выполнила необходимые расчеты коэффициентов α , играющих центральную роль при оценке приливной силы для всех трех моделей гравитирующих широких колец, а также для модели кругового тора. Собраны сведения о звезде красном сверхгиганте WOH G64. Полностью самостоятельно ею была поставлена задача по оценке приливного влияния двух колец на внутреннюю фигуру равновесия.

Список цитируемой литературы

1. Кондратьев Б. П., Трубицына Н. Г., Мухаметшина Э. Ш. Прямой метод нахождения потенциалов двумерных однородных тел // Вестник Удмуртского Университета. Серия Математика, 2003. С. 71.
2. Кондратьев Б. П. Теория потенциала и фигуры равновесия. Москва; Ижевск: Изд-во РХД, 2003.
3. Кондратьев Б. П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. Москва: Мир, 2007.
4. Кондратьев Б. П. Теория потенциала: эквигравитирующие стержни для осесимметричных тел // Вестник Удмуртского Университета. Серия Математика, № 4, 2000. С. 108.

- 10-
5. Кондратьев Б. П., Дубровский А. С., Трубицына Н. Г., Мухаметшина Э. Ш. Пространственный потенциал однородного кругового тора через эквигравитирующие элементы // Журнал технической физики, т. 78, № 7, 2008. С. 132.
 6. Кондратьев Б. П., Дубровский А. С., Трубицына Н. Г., Мухаметшина Э. Ш. Разложение потенциала однородного кругового тора в ряд Лапласа // Журнал технической физики, т. 79, № 2, 2009. С. 17.
 7. Кондратьев Б. П., Трубицына Н. Г. Разложение внутреннего потенциала однородного кругового тора в ряд Лапласа // Журнал технической физики, № 1, 2010.
 8. Кондратьев Б.П., Трубицына Н.Г. Фигуры равновесия компактных газопылевых туманностей в галактике // Вестник Удмуртского Университета. Серия Астрономия и математическая физика, №1, 2010. С. 52-67.
 9. Кондратьев Б.П., Трубицына Н.Г. Приливное влияние колец на центральные фигуры равновесия // Вестник Удмуртского Университета. Серия Астрономия и математическая физика, №1, 2010. С. 68-81.
 10. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.
 11. Кузмин Г. Г. Публ. Тарт. АО, 34, 9, 1964.
 12. Clemens D. P., Barvainis R. Ap. JS, 68, 157-186, 1988.
 13. Goodman A. A., Benson P. J., Fuller G. A., Myers P. S., Ap. J, 456, 528, 1993.
 14. Кондратьев Б.П. Динамика и устойчивость резонансных колец в галактиках // Астрон. журн. 2000. Т. 77. С. 323-330.